## RÉVISIONS ECG1

VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ.

**Exercice 1.-**
Une urne contient des jetons numérotés de 1 à $n$. On les tire un à un avec remise jusqu'à obtenir le plus petit. On note $X$ le nombre de tirages ainsi effectués.

**1.** Déterminer la loi de $X$.

**2.** Reconnaître cette loi.

**3.** Même question si on effectue les tirages sans remise.

**Exercice 2.-**
On tire au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de rois obtenus.

**1.** Déterminer la loi de $X$.

**2.** Calculer $E(X)$ à l'aide de la formule de Vandermonde : $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.

**Exercice 3.-**
D'un sac contenant $n$ jetons numérotés de 1 à $n$ ($n \geq 3$), on extrait simultanément 3 jetons. Soit $X$ la variable aléatoire égale au numéro tiré dont la valeur est intermédiaire entre les deux autres.

**1.** Quelle est la loi de $X$ ?

**2.** **a.** Montrer par récurrence que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{N} k^3 = \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2$.

**b.** Calculer $E(X)$.

**Exercice 4.-**
Soit $X$ une variable aléatoire telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \dfrac{4}{k(k+1)(k+2)}$.

**1.** Vérifier que ceci définit bien une loi de probabilité.

*On pourra remarquer que :* $\forall k \geqslant 1$, $\dfrac{4}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{2}{k} - \dfrac{4}{k+1} + \dfrac{2}{k+2}$.

**2.** **a.** Déterminer deux rées $a$ et $b$ tels que $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k+2}$ pour tout $k \geqslant 0$.

**b.** Calculer $E(X)$

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

**Exercice 5.-**
Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p$. On considère la variable aléatoire $Y$ définie de la façon suivante : si $X$ prend une valeur paire, alors $Y$ vaut $\frac{X}{2}$, et si $X$ prend une valeur impaire, alors $Y$ vaut $\frac{(X+1)}{2}$.

1. Déterminer la loi de $Y$.
2. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

**Exercice 6.-**
On considère une variable aléatoire $X$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout entier naturel $k$, $P(X = k) = \frac{4}{5}\frac{1}{5}^k$.
On pose $Y = X + 1$ et $Z = 2^Y$.

1. Déterminer la loi de $Y$.
2. En déduire sans effort l'espérance et la variance de $X$.
3. Calculer l'espérance et la variance de $Z$ si c'est possible.

**Exercice 7.-**
Soit $X$ une variable aléatoire telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = e^{-\alpha k}(e^{\alpha} - 1)$ avec $\alpha > 0$.

1. Vérifier que ceci définit bien une loi de probabilité.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

**Exercice 8.-**
On suppose que $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $a$. On pose $Y = e^{-X}$. Calculer, si c'est possible, $E(Y)$ et $V(Y)$.

**Exercice 9.-**
Un joueur lance une pièce équilibré jusqu'à l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu $n$ lancers ($n \geq 1$) pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer un billet de loterie parmi $n$ billets dont un seul est gagnant.
Exprimer la probabilité que le joueur gagne sous forme d'une somme.

**Exercice 10.-**
On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant 5 boules rouges et 10 boules noires. On note $X$ le nombre de boules rouges obtenues lors des 6 premiers tirages, $Y$ le numéro d'apparition du premier tirage donnant une boule rouge et $Z$ le numéro d'apparition (pour la première fois) d'une boule d'une même couleur que la première boule tirée.

1. Donner les lois de $X$ et $Y$.
2. **a.** Donner $Z(\Omega)$.
   **b.** En utilisant un système complet d'événements issus du premier tirage, donner la loi de $Z$.
   **c.** Calculer $E(Z)$.

**Exercice 11.-**
La fonction de répartition d'une variable aléatoire $F_X$ d'une variable aléatoire $X$ est donnée par

$$F_X = \begin{cases} 0 & \text{si} t < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si} -1 \leqslant t < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si} 1 \leqslant t < \\ 1 & \text{si} t > 2 \end{cases}.$$

1. Dessiner le graphe de $F_X$.
2. déterminer la loi de $X$.